Pourcentages et taux d'évolutions.

Manuel p.248.

Objectifs :

- Savoir exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situation simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages
- Savoir exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculerun taux d'évolution global à partir des taux successifs, calculer un taux d'évolution réciproque.

Aperçu historique :

*On peut dire que la collecte des données a toujours existé. En effet, les premiers textes écrits retrouvés sont des recensements du bétail. On a des traces de recensements de population en Chine au XXIIIe siècle av. J.-C. ou en Égypte au XVIIIe siècle av. J.-C.. Ce n'est qu'au XVIIIe siècle que l'on voit apparaître le rôle prévisionnel des statistiques avec la construction des premières tables de mortalité, avec en 1746 "L'essai sur les probabilités de la durée de vie humaine" d'**Antoine Deparcieux**. C'est au XIXe siècle que les statistiques prennent leur essor et que l'on édicte des règles précises pour la collecte et l'interprétation des données. Leur première application industrielle a lieu lors du recensement américain de 1890, qui met en œuvre la carte perforée inventée par le statisticien Herman Hollerith. C'est avec l'avènement de l'informatique dans les années 1940 que les statistiques prendront la place prépondérante qu'elles occupent aujourd'hui.*

1. Proportion, pourcentages.

A. Révisions sur les pourcentages

On peut écrire un pourcentage sous forme décimale : $18\% = \frac{18}{100} = 0,18$ (c'est 18 centièmes). C'est un nombre compris entre 0 et 1, on l'utilise pour définir les **proportions** ou les **fréquences**.

Pour calculer 18% de 368, on effectue : $0,18 \times 368$, où le mot "de" est traduit par l'opération "$\times$".
On peut aussi effectuer $\frac{18}{100} \times 368$, ce qui revient au même.

Pour savoir quel pourcentage de 535 représente 133,75, on effectue la division : $\frac{133,75}{535}$ ("le tout sur la partie").
On obtient 0,25, c'est-à-dire 25%. Ainsi, 133,75 représentent 25% de 535.

Nous allons revoir ces notions sous la forme de calcul de proportions.

B. Proportion d'une sous-population dans une population.

On travaille dans un ensemble E appelé ***population***, dont les éléments seront appelés ***individus*** en statistiques.
Soit A un ***sous-ensemble*** de E, appelé aussi ***sous-population*** .

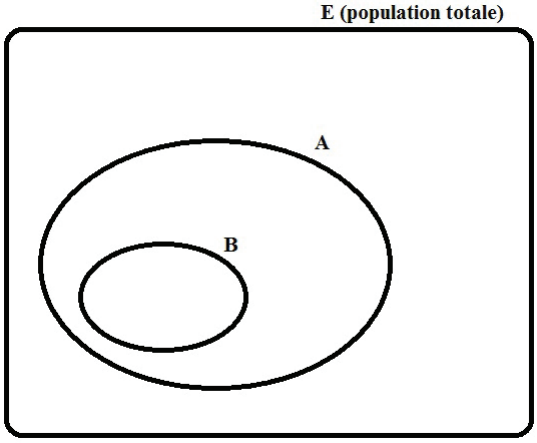
Définition 4.1 Soit $A \subset E$. Si on note N le nombre d'individus (nombre d'éléments) de E et n_A le nombre d'éléments de A, la ***proportion*** (ou ***fréquence***) de A dans E est

$$p = \frac{n_A}{N}$$

Une proportion peut s'écrire sous forme fractionnaire, décimale, ou sous forme de pourcentage.
Dans les calculs, la forme décimale sera souvent la plus commode.

Exemple Soit un élevage de 16 chevaux. Dans cet élevage, il y a 12 alezans.
La proportions d'alezans est $p = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, ou encore $0,75$ sous forme décimale, ou encore 75% sous forme de pourcentage.

C. Proportion de proportion, pourcentage de pourcentage.



Définition 4.2 Soient E la population totale, $A \subset E$ une sous-population de E, et $B \subset A$ une sous-population de A.
Si l'on note p_{AE} la proportion de A dans E et p_{BA} la proportion de B dans A, alors la proportion de B dans E est :

$$p_{BE} = p_{BA} \times p_{AE}$$

.

N.B. : Il s'agit d'un "pourcentage de pourcentage".

Démonstration Avec les notations précédentes, on a : $p_{AE} = \frac{n_B}{N} = \frac{n_B}{n_A} \times \frac{n_A}{N} = p_{BA} \times p_{AE}$

Exemple Si dans une classe de 36 élèves, 28 élèves font du sport, la proportion d'élèves qui font du sport est $p_1 = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$.
Si, parmi les élèves qui font du sport, 12 élèves font du tennis, la proportion d'élèves qui font du tennis relativement à ceux qui font du sport est $p_2 = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.
La proportion d'élèves qui font font du tennis relativement à l'ensemble de la classe est donc :
$p_1 \times p_2 = \frac{7}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$.
Vérification : il y a 12 élèves qui font du tennis sur une classe de 36 élèves, donc cette proportion est bien $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

D. Évolution et pourcentage.

Dire qu'une valeur V évolue signifie qu'elle change au cours du temps, pour passer d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f.

Définition 4.3
- On appelle ***variation absolue*** la différence $V_f - V_i$.
- On appelle ***variation relative*** la proportion $\frac{V_f - V_i}{V_i}$.
  La variation relative est aussi appelée ***taux d'évolution*** .

Exemple En 2008, le PIB (produit intérieur brut) de la France était, en milliards d'euros, de $1995,8$. En 2018, il était de $2282,8$.
La variation absolue du PIB sur 10 ans est de $2282,8 - 1995,8 = 287$ milliards d'euros.
Sa variation relative (ou son taux d'évolution) est de $\frac{2282,8-1995,8}{1995,8} = 0.1438$, ce qui signifie qu'en 10 ans, le PIB de la France a augmenté de 14.38%, en pourcentage de sa valeur initiale.

Soit v une valeur donnée. Augmenter v de t% revient à ajouter à v la grandeur t% de v, c'est-à-dire à calculer : $v + \frac{t}{100} \times v = v\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
De la même manière, diminuer v de t% revient à calculer : $v - \frac{t}{100} \times v = v\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Propriété 4.1
- **Augmenter** de t% une valeur revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$
- **Diminuer** de t% une valeur revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$
- Le coefficient $\left(1 \pm \frac{t}{100}\right)$ s'appelle alors le ***coefficient multiplicateur*** .

Remarque 4.1 Le nombre t ci-dessus est le ***taux d'évolution*** évoqué dans la définition précédente.

Exemple Si un article initialement vendu 180€ est soldé de 30%, son prix soldé sera $180 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 180 \times 0,7 = 126$€.

2. Évolutions successives, évolution réciproque.

A. Évolutions successives.

Propriété 4.2 Si une valeur initiale V_i subit successivement plusieurs évolutions de coefficients multiplicateurs CM_1, CM_2, ..., alors le coefficient multiplicateur global qui permet d'obtenir la valeur finale V_f est :

$$CMg = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ...$$

c'est-à-dire le produit des coefficients multiplicateurs.
Le taux d'évolution global est $t_g = CM_g - 1$.

Démonstration Notons V_1 la valeur obtenue après l'évolution de coefficient CM_1,V_2 la valeur obtenue après l'évolution de coefficient CM_2, etc...
On a : $V_1 = V_i \times CM_1$, puis $V_2 = V_1 \times CM_2 = V_i \times CM_1 \times CM_2$, et ainsi de suite.
Finalement, la valeur finale est $V_f = V_i \times CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ...$, Donc $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ...$
Le taux d'évolution est :
$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i \times CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ... - V_i}{V_i} = \frac{\cancel{V_i}(CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ... - 1)}{\cancel{V_i}} = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times ... - 1 = CM_g - 1$

Exemple Le prix d'un objet subit une hausse de 8% puis une seconde hausse de 10%.
Le coefficient multiplicateur global est $CM_g = 1,08 \times 1,10 = 1,188$, donc le taux d'évolution global est $0,188$: en tout, le prix de cet objet a augmenté de $18,8$%.

B. Évolution réciproque.

Propriété 4.3 Si une évolution fait passer de la valeur V_0 à la valeur V_1, alors l'évolution réciproque fait passer de la valeur V_1 à la valeur V_0.
Si le coefficient multiplicateur de l'évolution directe est CM, celui de l'évolution réciproque est $\frac{1}{CM}$
Le taux d'évolution réciproque t' est lié au taux d'évolution directe t par la relation :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}}$$

Démonstration $V_1 = V_0 \times CM$, donc $V_0 = V_1 \times \frac{1}{CM}$.
Donc le taux d'évolution réciproque est $\frac{1}{CM}$.

Exemple Entre 1955 et 1960, le taux de mortalité infantile en France était de 34 pour 1000. Entre 2010 et 2005, il était de 3,3 pour 1000.
Le coefficient multiplicateur traduisant l'évolution de la mortalité infantile entre 1955 et 2005 est de $0,097$, soit une baisse d'environ $90,29$%.
Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est de $\frac{1}{0,097} \simeq 10,31$, soit une augmentation d'environ $930,3$% : revenir au taux de mortalité infantile des années 50 représenterait une augmentation de $930,3$%.

3. Synthèse sur les nombres rationnels et réels.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. Énoncé des exercices

Méthode Quand un exercice est donné à faire à la maison, **toutes les questions** de cet exercice doivent être traitées sur le cahier d'exercices (pas au brouillon).
Dans le cas contraire, l'exercice sera considéré comme "non fait".
Toute trace de recherche, toute réponse, même fausse, est acceptée (à part la réponse "je n'ai pas compris" suivie d'aucune trace de recherche).
Je ne vous demande pas de réussir, je vous demande d'essayer ; et vous avez **le droit de vous tromper**.

Exercice 4.1
1. Écrire sous forme décimale les pourcentages suivants :
   19% 35% 2% $0,4\%$ $15,8\%$
2. Écrire sous forme de pourcentage les nombres décimaux suivants :
   $0,87$ $0,07$ $0,168$ $0,008$ $0,045$

Exercice 4.2 Calculer mentalement : 10% de 45€ 25% de 52€ 50% de 13€ 75% de 24€

Exercice 4.3 Dans un lycée, on compte 837 filles et 713 garçons.
1. La population de référence est celle des élèves du lycée. Quel est son effectif ?
2. Quelles sont les deux sous-populations étudiées ici ? Réaliser un diagramme de Venn.
3. Donner l'écriture fractionnaire de la proportion de filles dans ce lycée, puis donner cette proportion en pourcentage et enfin sous forme décimale.
4. Donner de même la proportion de garçons dans ce lycée sous forme fractionnaire, en pourcentage et en écriture décimale.

Exercice 4.4 On estime la population mondiale en 2018 à 7 632 819 milliers d'habitants, et celle de l'Europe à 742 648 milliers d'habitants.
1. Quelle proportion de la population mondiale la population de l'Europe représente-t-elle en 2018 ?
2. Sachant que l'Europe de l'Ouest compte, selon ces mêmes estimations, 194 073 milliers d'habitants, quelle proportion de la population européenne cela représente-t-il ?
3. Calculer de deux façons la proportion de la population mondiale habitant en Europe de l'Ouest.

Exercice 4.5 En France, en 1998, il y a eu 738 100 naissances. Le nombre de naissances entre 1998 et 2004 a augmenté de 4%.
1. A quel coefficient multiplicateur correspond cette évolution ?
2. Combien y a-t-il eu de naissances en France en 2004 ?
3. Quelle est la variation absolue du nombre de naissances en France entre 1988 et 2004 ?

Exercice 4.6
1. Un prix subit une baisse de 23%. Quel est le coefficient multiplicateur associé à cette évolution ?
2. Un prix a été multiplié par $0,87$. Quel est le pourcentage d'évolution ?

Exercice 4.7
1. En bourse, la valeur d'une action augmente de 7% entre janvier et février, puis baisse de 7% entre février et mars. Quelle est son évolution entre janvier et mars ?

2. Dans un journal télévisé, un journaliste affirme : "On n'avait jamais vu ça ! $+6\%$ par an pendant 5 ans, pas besoin d'avoir fait Polytechnique pour voir que ça représente une hausse de 30%... Concrètement, la facture moyenne pour un foyer qui était en 2012 de 693 euros passerait à 900 euros en 2017". Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4.8 Alexis a placé une somme d'argent au taux de $1,75\%$, les intérêts étant calculés annuellement et ajoutés au solde du compte. Il affirme : "Si je n'effectue aucun retrait et si le taux ne change pas, le solde de mon compte aura plus que doublé dans 40 ans !". A-t-il raison ? Expliquer.

Exercice 4.9 Pendant trois ans, le prix du litre de sans-plomb 95 a subi successivement une hausse de 8%, puis une hausse de 6% et une baisse de 12%.

1. Calculer le taux d'évolution global, arrondi à $0,1\%$.
2. Le prix de départ était de $1,35$€ le litre. Calculer la variation absolue du prix au bout des trois ans.
3. Quel taux d'évolution, arrondi à $0,1\%$ près, doit-on appliquer la quatrième année pour revenir au prix initial ?

Exercice 4.10 Durant les soldes, la gérante d'un magasin de chaussures et de vêtements souhaite que tous les clients achetant des chaussures et des vêtements bénéficient de 20% de remise.
Toutes les chaussures bénéficient de 15% de remise.

1. Calculer le montant de la remise ainsi que le pourcentage de remise sur les vêtements qu'elle doit accorder à une client dont la facture avant remise comporte 100€ de chaussures et 100€ de vêtements.
2. Le pourcentage de remise sera-t-il le même sur les vêtements si la facture comporte initialement 100€ de chaussures et 50€ de vêtements ? Le calculer.